

Eksperimenter 7: Boltzmann-statistik og tilstandssum

Man kan retfærdiggøre for Boltzmann fordelingen ved følgende heuristiske argument: Vi beskriver makrotilstanden for et system ved dets energi E , sandsynligheden for tilstanden E er $P(E)$. Forholdet imellem sandsynlighederne for systemet i to tilstande E_1 og E_2 , $P(E_1)/P(E_2)$ afhænger ikke af hvor vi har valgt nulpunktet for energien. Vi kunne jo løfte systemet i tyngdefeltet, hvilket ikke kan ændre på forholdet imellem sandsynlighederne. Derfor kan vi antage:

$$\frac{P(E_1 + x)}{P(E_2 + x)} = \frac{P(E_1)}{P(E_2)}.$$

1 Vis ved at bruge rækkeudviklingen $P(E + x) \approx P(E) + P'(E)x$ for små x at

$$\frac{P'(E_1)}{P(E_1)} = \frac{P'(E_2)}{P(E_2)}.$$

Da vestresiden alene afhænger af E_1 og højresiden alene afhænger af E_2 må de begge være konstante, uafhængige af E . Kald denne konstant $-\beta$ og find dermed $P(E)$.

I det følgende skal vi blive fortrolige med Boltzmann-fordelingen ved at arbejde med et modelsystem, hvor vi kaster med terninger. (Hver gruppe tager cirka 50 terninger.) Vi forestiller os et system, der kan befinde sig i en række diskrete energitilstande $E_1, E_2, \dots$. Det kunne for eksempel være en enkelt harmonisk oscillator (Einstein solid) med energierne $E_n = n\epsilon$. Dette system vekselvirker med et varmereservoir hvor energien i hvert tidsskridt (hvert terningekast) bliver tildelt systemet. Dette foregår ved at der slås med 5 terninger. Disse terninger tildeles et nummer (alternativt kan der slås med en terning 5 gange). Energien er nu antallet af terninger FRA nummer 1, hvor slaget er større end 3. Altså serierne 5-5-2-3-1, 2-6-3-6-6, 4-6-4-2-4 og 4-2-4-4-6 har energierne henholdsvis 2ϵ , 0 , 3ϵ og ϵ . I skal altså på en eller anden måde holde øje med terningenummeret.

Slå nu ca 50 gange, og for hvert slag anbringes en terning ud for den givne energi (fra 0 til 5ϵ).

2 Beregn ud fra data middelværdien af energien.

3 Hvad er den forventede frekvens? (sandsynligheden $P(E)$ kaldes i statistik-jargon for "hyppigheden" eller "frekvensen").

4 Hvis I bare talte antal terninger med slaget større end 3, hvilken frekvens ville I så få?

Gentag nu forsøget men i to andre situationer: (a) Der tælles fra 1. terning antallet af terninger med slaget større end 1 og (b) Der tælles fra 1. terning antallet af seksere.

5 Beregn igen middelværdien i de to tilfælde.

6 Opskriv tilstandssummen Z i de tre tilfælde og beregn temperaturen i de tre tilfælde.

7 Beregn ved hjælp af tilstandssummen Z middelværdien i de tre tilfælde og sammenlign med data-resultaterne.

Hvis I har tid til overs kan I løse bogens opgaver 6.16, 6.17 og 6.18