

Øvelse 11. Geodæsi. Statistisk analyse af tyngdedata og kovariansfunktioner.

I følgende N = 15 punkter er tyngdeanomalien målt som opgivet i tabellen, - som funktion af bredden.

Punkt	Bredde [grad]	Længde [grad]	Højde [m]	Tyngde [mgal]
11	56.0	10.0	0.0	4.0
12	56.1	10.0	0.0	2.0
13	56.2	10.0	0.0	0.0
14	56.3	10.0	0.0	-2.0
15	56.4	10.0	0.0	-4.0
16	56.5	10.0	0.0	-6.0
17	56.6	10.0	0.0	-8.0
18	56.7	10.0	0.0	-9.0
19	56.8	10.0	0.0	-7.0
20	56.9	10.0	0.0	-5.0
21	57.0	10.0	0.0	-3.0
22	57.1	10.0	0.0	-1.0
23	57.2	10.0	0.0	1.0
24	57.3	10.0	0.0	5.0
25	57.4	10.0	0.0	4.0

Kovarians værdier $Cov(s)$ beregnes for varierende afstande fra punkterne, ifølge formel nedenfor. Der laves 10 intervaller hvert på 0.1 grad (det første dog kun 0.05 grad) som vist i nedenstående tabel, og (s) er afstanden mellem 2 målepunkter.

$$Cov(s) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=i}^N X_i \cdot X_j, \text{ for } |P(X_i)P(X_j)| = s$$

I afstandsintervallet $[0:0.05]$ grader fra punkterne findes kun punkterne selv, - altså $i = j$:

$$Cov(s \in [0 : 0.05]) = \frac{1}{15} \sum_{i=1}^{15} X_i^2 = \frac{1}{15} (X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + \dots)$$

, hvilket er det samme som variansen for punkterne. For punkter i afstanden $[0.85 : 0.95]$ findes:

$$Cov(0.85 : 0.95) = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 (X_i \cdot X_j) = \frac{1}{6} \underbrace{(4 \cdot (-5) + 2 \cdot (-3) + 0.0 \cdot (-1) + (-2) \cdot 4 + (-4) \cdot (5) + (-6) \cdot 4)}_{6 \text{ produkter}}$$

Resten af produkterne er beregnet og indsat i nedenstående tabel.

Interval	Afstand (s) [grader]	Antal produkter	Sum [mgal ²]	Kovarians [mgal ²]
1]0:0.05]	15	347	23.13333
2]0.05:0.15]	14	300	21.42857
3]0.15:0.25]	13	217	16.69231
4]0.25:0.35]	12	128	10.66667
5]0.35:0.45]	11	37	3.36364
6]0.45:0.55]	10	-44	-4.40000
7]0.55:0.65]	9	-103	-11.44444
8]0.65:0.75]	8	-122	-15.25000
9]0.75:0.85]	7	-102	-14.57143
10]0.85:0.95]	6	-72	-12.00000

Tyngde værdierne i kendte punkter kan sammen med kovariansen som funktion af s benyttes til at finde skøn for værdier i punkter med ukendt værdi, som ligger i afstanden s fra de kendte punkter. Dette gøres med kollokation.

1. Hvor ligger 1. nulpunkt og hvad er korrelations længden?

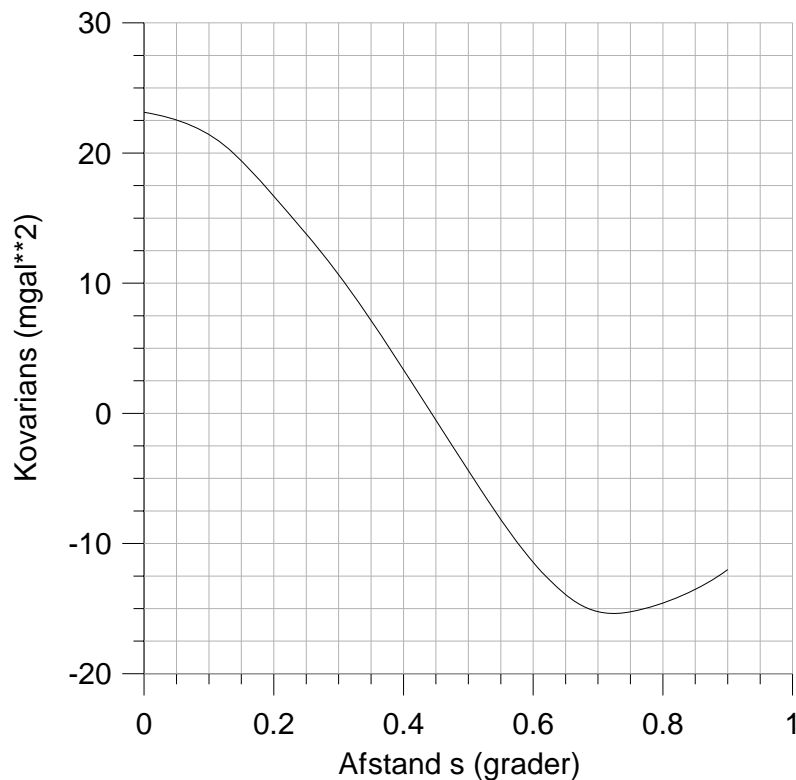


Figure 1 Kovarians tegnet som function af afstand s

På kovarians grafen kan korrelationslængden (afstanden til at kovariansen falder 50 %) aflæses til (ca.) 0.28 grader og 1. nulpunkt ligger omtrent ved (knap) 0.45 grader.

2. Find tyngden i et punkt P_x med bredde 56.65 og længde 10.0 ud fra punkt 18.

Kollokations formel:

$$\tilde{x} = (C_{Pi}) \cdot (C_{ij})^{-1} \cdot \bar{y}$$

x er de ønskede skønnede værdier, C_{Pi} er kovariansen af afstanden s fra de kendte punkter til de ukendte punkter, C_{ij} er kovarians matricen for de brugte punkter, og y er værdierne i de kendte punkter.

Kovarians matricen er kendetegnet ved at have varianserne i diagonalen, og kovarians værdier symmetrisk fordelt over og under diagonalen.

Afstanden mellem P_x og P_{18} er 0.05 grader

$$\text{Cov}(0.05) = 22.5 \text{ mgal}^2 \text{ (skønnet fra graf)}$$

Ved indsættelse fås:

$$x = (\text{Cov}(0.05)) \cdot (\text{Var})^{-1} \cdot (\text{tyngde i } P_{18})$$

$$x = 22.5 \cdot (1/23.13) \cdot (-9.0)$$

$$x = -8.755 \text{ mgal}$$

3. Find tyngden i punktet P_x ud fra punkterne 17 og 18.

Igen fås ved indsættelse:

$$\tilde{x} = (\text{cov}(0.05) \quad \text{cov}(0.05)) \cdot \begin{pmatrix} \text{Var} & \text{Cov}(17,18) \\ \text{Cov}(17,18) & \text{Var} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \text{Tyngde}(17) \\ \text{Tyngde}(18) \end{pmatrix}$$

$$\text{Cov}(17,18) = \text{Cov}(|P_{17}P_{18}|) = \text{Cov}(0.1) = 21.3 \text{ mgal}^2 \text{ (skønnet fra graf)}$$

$$\tilde{x} = (22.5 \quad 22.5) \cdot \begin{pmatrix} 23.13 & 21.3 \\ 21.3 & 23.13 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -8.0 \\ -9.0 \end{pmatrix} = -8.491 \text{ mgal}$$

4. Find tyngden i punktet P_x ud fra punkterne 17, 18 og 19.

$$\tilde{x} = (\text{cov}(0.05) \quad \text{cov}(0.05) \quad \text{cov}(0.15)) \cdot \begin{pmatrix} \text{Var} & \text{cov}(17,18) & \text{cov}(17,19) \\ \text{cov}(17,18) & \text{Var} & \text{cov}(18,19) \\ \text{cov}(17,19) & \text{cov}(18,19) & \text{Var} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \text{Tyngde}(17) \\ \text{Tyngde}(18) \\ \text{Tyngde}(19) \end{pmatrix}$$

$$\text{cov}(17,19) = \text{cov}(0.2) = 17.0 \text{ (skønnet på graf)}, \text{ cov}(0.15) = 19.3 \text{ (skønnet på graf)}$$

$$\tilde{x} = (22.5 \quad 22.5 \quad 19.3) \cdot \begin{pmatrix} 23.13 & 21.3 & 17.0 \\ 21.3 & 23.13 & 21.3 \\ 17.0 & 21.3 & 23.13 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -8.0 \\ -9.0 \\ -7.0 \end{pmatrix} = -8.5 \text{ mgal (regn hellere efter)}$$

Fejlskøn: (CCT noter)

$$\sigma^2 = C_0 - C_{P_i}^T C_{ij} C_{P_i}$$

$$\sigma^2 = 23.13 - (22.5 \quad 22.5 \quad 19.3) \cdot \begin{pmatrix} 23.13 & 21.3 & 17.0 \\ 21.3 & 23.13 & 21.3 \\ 17.0 & 21.3 & 23.13 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 22.5 \\ 22.5 \\ 19.3 \end{pmatrix}$$

$$\sigma = 0.57924 \text{ mgal}$$